Teorem: M, N, M_y ve N_x fonksiyonları $R: \alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ dikdörtgensel bölgesinde sürekli olsunlar. Bu durumda

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

dif. denkleminin R bölgesinde tam dif. denklem olması için gerek ve yeter şart R'nin her noktasında

$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

olmasıdır. Yani

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \quad \psi_y(x,y) = N(x,y)$$

şartını sağlıyan bir ψ fonksiyonun olması için gerek ve yeter şart M ve N'nin $M_y = N_x$ şartını sağlamasıdır.

Örnekler: 1) $(3x^2+1) + (3y^2+2y)y' = 0$ dif. denklemini çözünüz.

$M(x,y) = M(x) = 3x^2+1 \qquad M_y = 0$

$N(x,y) = N(y) = 3y^2+2y \qquad N_x = 0$

$M_y = 0 = N_x$ tam dif. denklem

$$\psi_x(x,y) = M(x,y) = 3x^2+1$$

$$\psi_y(x,y) = N(x,y) = 3y^2+2y$$

$$\psi(x,y) = x^3 + x + h(y)$$

$$\psi_y(x,y) = h'(y) = 3y^2+2y$$

$$h(y) = y^3 + y^2 + c \qquad c = 0$$

$$h(y) = y^3 + y^2$$

$$\psi(x,y) = x^3 + x + y^3 + y^2$$

$$\frac{d}{dx}\psi(x,y) = 0$$

$$\psi(x,y) = c \Rightarrow x^3 + y^3 + y^2 + x = c$$

Bu dif. denklem ayrılabilir dif. denklemdir:

$$(3x^2+1)\,dx + (3y^2+2y)\,dy = 0$$

$$x^3 + x + y^3 + y^2 = c$$

Ayrılabilir dif. denklemler, tam dif. denklemlerdir.

$$M(x) + N(y)\,y' = 0$$

$$M_y = 0 = N_x$$

2) $(2x^2y+x^2+3y^2)\,dy+(2xy^2+2xy)\,dx=0$ dif. denklemi çöz.

$M(x,y)=2xy^2+2xy$ $\quad M_y=4xy+2x$

$N(x,y)=2x^2y+x^2+3y^2$ $\quad N_x=4xy+2x$ $\quad \Rightarrow M_y=N_x$

tam dif. denk.

$\psi_x(x,y)=2xy^2+2xy$

$\psi_y(x,y)=2x^2y+x^2+3y^2$

$\psi(x,y)=x^2y^2+x^2y+h(y)$

$\psi_y(x,y)=2x^2y+x^2+h'(y)=2x^2y+x^2+3y^2 \Rightarrow h'(y)=3y^2 \Rightarrow h(y)=y^3$

$\psi(x,y)=x^2y^2+x^2y+y^3$ $\quad$ çözüm $x^2y^2+x^2y+y^3=c$

3) $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\ln x-2)\,dy=0$ $\quad x>0$ dif. denk. çözünüz.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y)&=\frac{y}{x}+6x & M_y&=\frac{1}{x}\\ N(x,y)&=\ln x-2 & N_x&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow M_y=N_x$$

tam dif. denkler

$\psi_x=\frac{y}{x}+6x$

$\psi_y=\ln x-2$

$\psi=y\ln x+3x^2+h(y)$

$\psi_y=\ln x+h'(y)=\ln x-2 \Rightarrow h'(y)=-2 \Rightarrow h(y)=-2y$

$\psi(x,y)=y\ln x+3x^2-2y$ $\quad$ çözüm $y\ln x+3x^2-2y=c$

4) $dx+\left(\frac{x}{y}-\sin y\right)dy=0$ dif. denklemini çöz.

$M(x,y)=1$ $\quad M_y=0$ $\quad M_y\neq N_x$ tam dif. denklem değil.

$N(x,y)=\frac{x}{y}-\sin y$ $\quad N_x=\frac{1}{y}$

yukardaki yöntemle çözmeye çalışalım:

$\psi_x(x,y)=M(x,y)=1$ $\quad \psi(x,y)=x+h(y)\Rightarrow \psi_y=h'(y)=\frac{x}{y}-\sin y$ OLMAMALI

$\psi_y(x,y)=\frac{x}{y}-\sin y$

İntegral Çarpanları:

Tam dif. denklem olmayan bir dif. denklemi uygun integral çarpanı ile çarparak tam dif. denkleme dönüştürmek olanaklıdır. Buna göre

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.16)$$

dif. denklemini öyle bir μ fonksiyonu ile çarpalım ki

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.17)$$

tam dif. denklem olsun. Teoreme göre bu denklemin tam olması için gerek ve yeter şart

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

dır. M ve N verilen fonksiyonlar olduğu için μ integral çarpanı

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0 \qquad (2.18)$$

1. mertebe kısmi dif. denklemini sağlamalıdır. (2.18) denklemini sağlayan bir μ fonksiyonu bulunabilirse (2.17) denklemi tam dif. denklem olacaktır. Bu yolla bulunan çözüm, (2.17) denklemini sağlar.

integral çarpanı sadeleştirildiğinde, çözüm (2.16) denklemini de sağlar.

(2.18) kısmi dif. denkleminin birçok çözümü olabilir. Bu durumda herhangi bir çözüm (2.16) denklemi için integral çarpanı olarak alınabilir.

μ integral çarpanını bulmak verilen dif. denklemi çözmek kadar zor olabilir. Bu yüzden, pratikte özel durumlarda μ çarpanı bulunur. En basit integral çarpanları iki değişken yerine yalnız bir değişken içeren integral çarpanlarıdır. Şimdi yalnız x değişkenini içeren μ integral çarpanının koşuluna bakalım;

$$(\mu M)_y = \mu M_y \qquad (\mu N)_x = \mu' N + \mu N_x$$

tam olması için

$$\mu' = \frac{M_y - N_x}{N}\mu \quad , \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

böylece μ integral çarpanını bulmak için yalnızca adi dif. denklemi çözmek yeterli olacaktır. Eğer μ, y'ye bağlı ise

$$(\mu M)_y = \mu M_y + \mu' M \qquad (\mu N)_x = \mu N_x$$

tam olması için

$$\mu' = \frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu$$

ve μ, y'ye bağlı bulunur.

Örnekler: 1) $dx + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)dy = 0$ integral çarpanını bulunuz ve çözünüz.

$M(x,y) = 1 \qquad M_y = 0$

$N(x,y) = \frac{x}{y} - \sin y \qquad N_x = \frac{1}{y} \qquad M_y \neq N_x$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{\frac{1}{y} - 0}{1} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{y}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln\mu = \ln y \Rightarrow \mu = y$$

$$y\,dx + (x - y\sin y)\,dy = 0$$

$\psi_x(x,y) = y$

$\psi_y(x,y) = x - y\sin y$

$\psi(x,y) = xy + h(y)$

$\psi_y = x + h'(y) = x - y\sin y \Rightarrow h'(y) = -y\sin y$

$\Rightarrow h(y) = y\cos y - \sin y$

$\psi(x,y) = c \Rightarrow xy + y\cos y - \sin y = c$

2) $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$ integral çarpanı bularak dif. denk. çözünüz.

$M(x,y) = y \qquad M_y = 1$

$N(x,y) = 2xy - e^{-2y} \qquad N_x = 2y \qquad (M_y \neq N_x)$

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2y-1}{y} \qquad (y \neq 0)$$

$$\frac{d\mu}{dy}=\frac{N_x-M_y}{M}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dy}=\frac{2y-1}{y}\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\left(2-\frac{1}{y}\right)dy$$

$$\ln\mu = 2y-\ln|y|$$

$$\ln|\mu . y| = 2y \Rightarrow \mu y = e^{2y} \Rightarrow \mu = \frac{e^{2y}}{y}$$

$$e^{2y}\,dx+\left(2xe^{2y}-\frac{1}{y}\right)dy=0$$

$$\psi_x(x,y)=e^{2y}$$

$$\psi_y(x,y)=2xe^{2y}-\frac{1}{y}$$

$$\psi(x,y)=xe^{2y}+h(y)$$

$$\psi_y(x,y)=2xe^{2y}+h'(y)=2xe^{2y}-\frac{1}{y}\Rightarrow h'(y)=-\frac{1}{y}\Rightarrow h(y)=-\ln|y|$$

$$\psi(x,y)=c \Rightarrow xe^{2y}-\ln|y|=c \quad (y\neq 0)\ ,\quad y=0 \text{ diğer çözüm}$$

3) $(xy-1)+(x^2-xy)\,y'=0$

$$M(x,y)=xy-1 \qquad M_y=x \qquad (M_y\neq N_x)$$

$$N(x,y)=x^2-xy \qquad N_x=2x-y$$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{x-(2x-y)}{x(x-y)}=-\frac{1}{x}$$

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{M_y-N_x}{N}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dx}=-\frac{1}{x}\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{x}dx$$

$$\ln\mu=-\ln x \Rightarrow \mu=\frac{1}{x}$$

$$\left(y-\frac{1}{x}\right)+(x-y)\,y'=0$$

$$\psi_x(x,y)=y-\frac{1}{x}$$

$$\psi_y(x,y)=x-y$$

$$\psi(x,y)=xy-\ln|x|+h(y)$$

$$\psi_y(x,y)=x+h'(y)=x-y \Rightarrow h'(y)=-y \Rightarrow h(y)=-\frac{y^2}{2}$$

$\psi(x,y)=c \Rightarrow xy-\ln|x|-\frac{y^2}{2}=c$

4) $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$ dif. denklemini $\mu(x,y)=\frac{1}{xy^3}$ integrasyon çarpanı ile çarpıldığında tam olduğunu göstererek denklemi çözünüz.

$$x+\frac{1+y^2}{y^3}y'=0$$

$M(x,y)=x$ $\quad M_y=0$ $\quad M_y=N_x$ tam dif. denklem.

$N(x,y)=\frac{1+y^2}{y^3}$ $\quad N_x=0$

$\psi_x=x$ $\quad \psi(x,y)=\frac{x^2}{2}+h(y)$

$\psi_y=\frac{1+y^2}{y^3}$ $\quad \psi_y=h'(y)=y^{-3}+y^{-1} \Rightarrow h(y)=-\frac{1}{2}y^{-2}+\ln y$

$$\psi(x,y)=c \Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}y^{-2}+\ln|y|=c \;,\; y=0$$